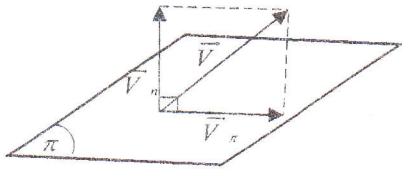


التمرين الأول: (8 نقاط)



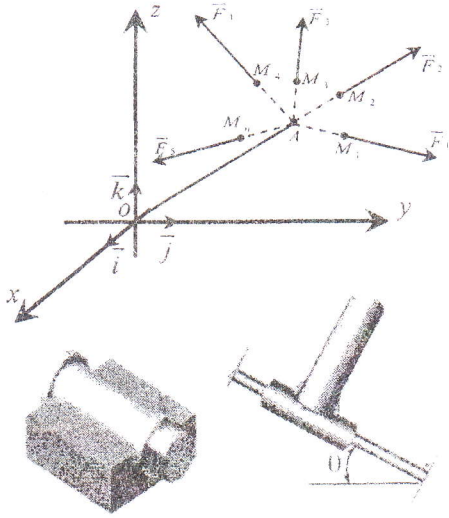
- ليكن $\vec{V}$ هو شعاع و (π) هو مستوي من الفضاء معرف بالناظم $\vec{n}$ ، حيث: $\vec{V}_\pi$ هي مركبة $\vec{V}$ في المستوي (π) و $\vec{V}_n$ هي مركبة $\vec{V}$ على الناظم $\vec{n}$.

• أثبت أن: $\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$

- تقول نظرية فارينيو: مجموع عزوم القوى المتقاطعة في نقطة بالنسبة لنقطة معينة تساوي عزم محصلة هذه القوى.

• أثبت أن: $\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_{O} = \vec{M}(\vec{R})_{O}$

- أوجد نوع و عدد درجات الحرية، وكذلك مركبات ردود الأفعال في الأشكال التالية:



التمرين الثاني: (6 نقاط)

لتكن الأشعة التالية:

$$\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$$

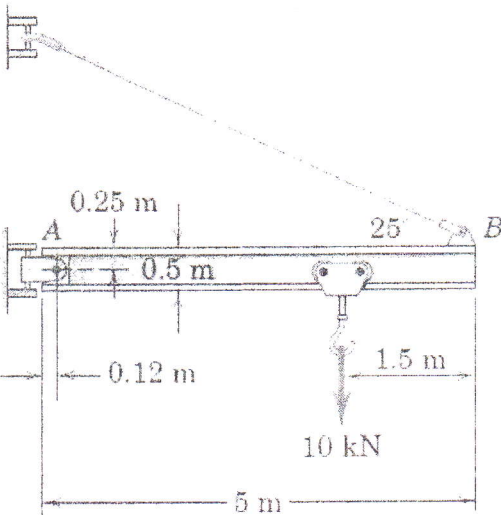
$$A(0,1,2), \quad B(1,0,2), \quad C(1,2,0)$$

- أنشئ القاتل $\{T\}_O$ المرتبط بنظام الأشعة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$.

- استنتج العزم الذاتي.

- احسب خطوة القاتل.

- أوجد المحور المركزي للقاتل شعاعيا و تحليليا.



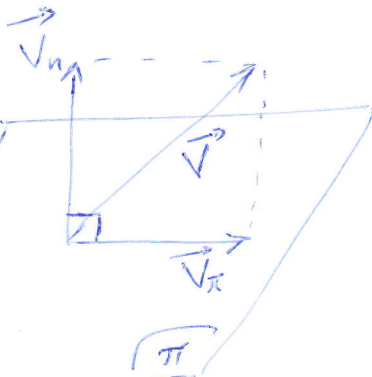
التمرين الثالث: (6 نقاط)

أوجد قيمة توتر الحبل الداعم T ومقدار القوة المؤثرة على المشبك عند النقطة A للرافعة الموضحة في الشكل المقابل.

كتلة العارضة هي 95 كلغ لكل 1 متر من الطول.

تصحيح واختبار السداسي الأول في الميكانيك الجذري
السنة الدراسية: 2022 / 2021

حل التمرين الأول



1- الشعاع $\vec{V}$ له مركبتين، $\vec{V}_{\pi}$ في المستوى و $\vec{V}_n$ على الناطق.

$$\vec{V} = \vec{V}_{\pi} + \vec{V}_n \Rightarrow \vec{V}_{\pi} = \vec{V} - \vec{V}_n$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\pi} = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\pi} = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

$$\vec{V}_{\pi} = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$$

2- إثبات أن: $\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_O = \vec{M}(\vec{R})_O$

لدينا: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i (M_i)$

$$\vec{OM}_1 = \vec{OA} + \vec{AM}_1$$

$$\vec{OM}_2 = \vec{OA} + \vec{AM}_2$$

...

$$\vec{OM}_n = \vec{OA} + \vec{AM}_n$$

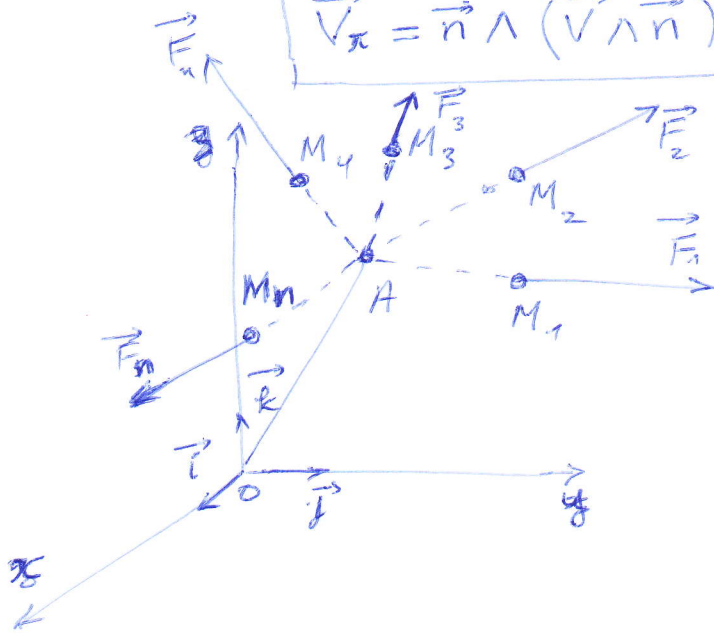
$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_O = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OM}_n \wedge \vec{F}_n$$

$$= (\vec{OA} + \vec{AM}_1) \wedge \vec{F}_1 + (\vec{OA} + \vec{AM}_2) \wedge \vec{F}_2 + \dots + (\vec{OA} + \vec{AM}_n) \wedge \vec{F}_n$$

$$\vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \iff \vec{AM}_i \parallel \vec{F}_i$$

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_O = \vec{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{OA} \wedge \vec{R}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_O = \vec{M}(\vec{R})_O}$$



3 - درجات الحرية ومركبات ردود الأفعال:

الشكل	عدد درجات الحرية	نوع درجات الحرية	مركبات ردود الأفعال
1	5	2: انتقال 3: دوران	$R = R_3$
2	0	0: انتقال 0: دوران	$R = R_x + R_y + R_z$
3	1	0: انتقال 1: دوران	$R = R_x + R_y + R_z$
4	3	0: انتقال 3: دوران	$R = R_x + R_y + R_z$
5	2	1: انتقال 1: دوران	$R = R_y + R_z$
6	1	0: انتقال 1: دوران	$R = R_x + R_y + R_z$

حل التمرين الثاني:

(1) حساب عناصر الإختزال للفاتل [7]:

أ. المحصلة: $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{j} + 3\vec{k}$

ب. العزم في النقطة O: $\vec{M}_O = \vec{OA}_1 \wedge \vec{V}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{V}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{V}_3$

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) حساب العزم الذاتي:

$$A = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = (\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k})$$

$$= -4 - 3 = -7$$

(3) خطوة الفاتل:

$$P = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} = \frac{-7}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

$$P = \frac{-7}{\sqrt{10}}$$

(4) المعادلة الشعاعية المحور المركزي:

- إذا كان (Δ) هو محور مركزي، إذن: $\forall P \in (\Delta) \Rightarrow \vec{M}_P' = \lambda \vec{R}$ حيث:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \vec{R} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{OP} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} +11 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \frac{11}{10} \vec{i} + \left(-\frac{9}{10} + \lambda\right) \vec{j} + \left(\frac{3}{10} + 3\lambda\right) \vec{k}$$

- العبارة التحليلية:

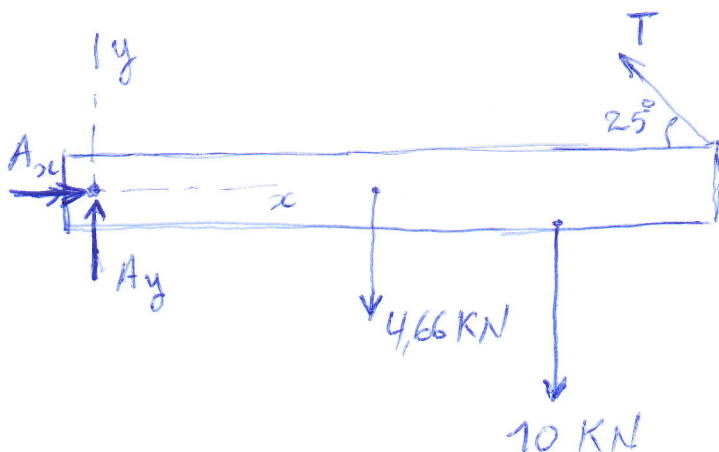
$$\vec{OP} = \begin{cases} \frac{11}{10} \\ -\frac{9}{10} + \lambda \\ \frac{3}{10} + 3\lambda \end{cases}$$

$$z = \frac{11}{10} + 3\left(y + \frac{9}{10}\right) = \frac{11}{10} + 3y + \frac{27}{10} = 3y + \frac{19}{5}$$

المحور المركزي مستقيم موازي للمستوي (yOz) يمر من النقطة $x = \frac{11}{10}$

$$z = 3y + \frac{19}{5}$$

حل التمرين الثالث:



(1) - ثقل العارضة هو:

$$\vec{P} = 95 \text{ Kg} \times 5 \text{ m} \times 9,81$$

$$|\vec{P}| = 4,66 \text{ kN}$$

(2) حساب مجموع العزوم بالنسبة للنقطة A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (T \cos 25^\circ) \cdot 0,25 + (T \sin 25^\circ) (5 - 0,12)$$

$$-10(5 - 1,5 - 0,12) - 4,66(2,5 - 0,12) = 0$$

$$\Rightarrow T = 19,61 \text{ kN}$$

الإسقاط على المحور: Ox

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 19,61 \cos 25^\circ = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 17,77 \text{ KN}$$

الإسقاط على المحور: Oy

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 19,61 \sin 25^\circ - 4,66 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 6,37 \text{ KN}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow A = \sqrt{(17,77)^2 + (6,37)^2} = 18,88 \text{ KN}$$